

Efectos de cambios en la riqueza del agente sobre la ganancia esperada del principal

Héctor Chade¹
Virginia N. Vera de Serio²

1 Introducción

En este trabajo se analiza el modelo del principal-agente cuando el agente posee una cierta riqueza inicial. El principal contrata al agente para realizar una tarea pero no puede observar la acción efectivamente realizada por éste, sino sólo un resultado aleatorio, cuya probabilidad depende de la acción elegida por el agente. El problema del principal es diseñar un contrato con un esquema de incentivos que induzca al agente a emprender la acción que maximiza el beneficio esperado del principal. Se supone que el agente es averso al riesgo y por lo tanto el principal debe asumir parte del riesgo, de este modo es necesario un esquema variable de incentivos. En un primer momento se considerará, como lo realizan Grossman y Hardt ([2], [3], [4]), que el principal es neutral al riesgo, luego se analizará el caso en que tanto el agente como el principal son aversos al riesgo.

La pregunta fundamental es cómo la riqueza del agente afecta el esquema óptimo de incentivos y, por lo tanto, el beneficio esperado del principal en el modelo clásico del principal-agente. Como Thiele y Wambach ([5]) afirman, esta pregunta posee un gran interés empírico e importancia teórica: si la riqueza del agente afecta el salario esperado que se le debe pagar, esto es un criterio importante para el principal cuando debe decidir cuál agente elegir. Si un principal enfrenta dos agentes que difieren en su nivel de riqueza inicial, pero son idénticos en lo demás, entonces el principal contrataría al agente menos rico si el costo de implementar una determinada acción aumenta con esta riqueza inicial, o por el contrario contrataría al más rico en el caso opuesto. Se puede conjeturar que agentes más ricos necesitan una mayor compensación por el mismo esfuerzo, haciendo más difícil que la restricción de participación se satisfaga (aumenta la tasa marginal de sustitución entre ingreso y esfuerzo). Además, puede ser más difícil evitar que el agente elija menores niveles de esfuerzo, por lo tanto las restricciones de compatibilidad de incentivos son más exigentes. Por otra parte también puede ocurrir que un agente más rico sea menos averso al riesgo y por lo tanto disminuya el costo del principal. Es así como se observa que se pueden presentar dos efectos contrapuestos, siendo de gran importancia tratar de dilucidar cuál de los mismos predomina. Thiele y Wambach analizaron el caso de funciones de utilidad aditivamente separables y mostraron ciertas condiciones bajo las cuales siempre el costo del principal aumenta cuando el agente es más rico. En el caso de funciones no aditivamente separables encontraron que puede ocurrir el efecto contrario. En este trabajo se estudia el caso de funciones de utilidad aditivamente separables y se prueba que en determinadas condiciones el beneficio del principal puede aumentar cuando el agente es más rico. En

¹Department of Economics, Arizona State University.

²Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo.

particular se analizan, para el agente, las funciones de utilidad tipo HARA, que presentan un coeficiente de aversión al riesgo decreciente en el ingreso.

El presente trabajo se organiza de la siguiente forma: en la Sección 2 se presenta el modelo; la Sección 3 describe los resultados de Thiele y Wambach ([5]) en el caso de una utilidad aditivamente separable, presentando una nueva demostración de su resultado principal; se analiza el caso de dos acciones y dos resultados posibles; las funciones de utilidad tipo HARA se estudian en la Sección 4 y en la Sección 5 se considera el caso de un principal averso al riesgo. La sección 6 concluye.

2 El modelo

El modelo que se considera es el modelo clásico de información asimétrica (riesgo moral) de Grossman y Hardt ([2]) del principal-agente, con la única diferencia que el agente posee una cierta cantidad de "riqueza inicial", θ .

Se supone que se tiene un número finito de acciones (m) y un número finito de resultados observables (n). Como es estándar en la literatura se asume que el principal es neutral al riesgo y que el agente es averso al riesgo. La función de utilidad del agente se supone de la forma

$$V(I) - \psi(a),$$

donde V y ψ tienen derivadas de primero y segundo orden continuas que verifican

$$V' > 0, \quad V'' < 0, \quad \psi \geq 0, \quad \psi' > 0 \quad \text{y} \quad \psi'' > 0; \quad (1)$$

a indica la acción e I el ingreso del agente. Con \bar{I} se indica el ingreso que el agente puede obtener en otro lugar si no trabaja para el principal (salario de reserva).

Se supone que los productos, o resultados, posibles son $q_1 < q_2 < \dots < q_n$, y que $\pi_i(a)$ es la probabilidad de obtener q_i cuando el agente realiza la acción a ; I_i es el incentivo que recibe el agente por parte del principal cuando se observa el resultado q_i , $i = 1, \dots, n$.

En el caso de un principal neutral al riesgo, su beneficio neto ($\sum_{i=1}^n \pi_i(a)(q_i - I_i) = \sum_{i=1}^n \pi_i(a)q_i - \sum_{i=1}^n \pi_i(a)I_i$) es máximo cuando se minimiza el costo. Por ello es que la acción óptima que debe elegir el principal es aquella con mínimo costo de implementación. De allí que es suficiente estudiar el comportamiento del costo cuando cambia la riqueza del agente.

Para cada acción a que el principal desea implementar, su problema de minimización de costos es el siguiente:

$$\min_{I_1, \dots, I_n} \sum_{i=1}^n \pi_i(a) I_i,$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(a) V(I_i + \theta) - \psi(a) \geq V(\bar{I} + \theta), \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(a) V(I_i + \theta) - \psi(a) \geq \sum_{i=1}^n \pi_i(a') V(I_i + \theta) - \psi(a'), \quad \text{para toda acción } a'. \quad (3)$$

La primera de estas desigualdades representa la restricción de participación, mientras que las restantes corresponden a las restricciones de compatibilidad de incentivos. A través

del cambio de variables $h = V^{-1}$, como es usual, este problema puede escribirse de la siguiente forma:

$$\min_{v_1, \dots, v_n} \sum_{i=1}^n \pi_i(a) h(v_i) - \theta,$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(a) v_i - \psi(a) \geq V(\bar{I} + \theta), \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(a) v_i - \psi(a) \geq \sum_{i=1}^n \pi_i(a') v_i - \psi(a'), \quad \text{para toda acción } a', \quad (5)$$

donde $v_i = V(I_i + \theta)$, $I_i = h(v_i) - \theta$. Obsérvese que ahora las restricciones son lineales.

Con $C(a, \theta)$ se denotará el valor de cualquiera de estos problemas, el cual indica el costo mínimo esperado, para el principal, de lograr que el agente realice la acción a . En el caso de la acción de mínimo esfuerzo para el agente, el costo del principal es simplemente ofrecer un esquema de incentivos constantes, $I_i = I$, $i = 1, \dots, n$, que compense el costo del esfuerzo e iguale el valor de reserva del agente,

$$V(I + \theta) = V(\bar{I} + \theta) + \psi(a).$$

Si en cambio se pretende implementar una acción de mayor esfuerzo (mayor costo) para el agente, el esquema de incentivos (I_1, \dots, I_n) no podrá ser constante.

3 El costo $C(a, \theta)$ y la riqueza inicial

Surge inmediatamente la pregunta: ¿Es siempre creciente el costo como función de la riqueza inicial? La respuesta es que en general no lo es, como lo muestra el Ejemplo 1 más adelante. En el caso de información completa (donde no se presenta riesgo moral), el principal puede observar la acción que realiza el agente, ya no son necesarias las restricciones de compatibilidad de incentivos pues la acción misma se puede incluir en el contrato. Por lo tanto para implementar una determinada acción a basta con ofrecer un incentivo I^* tal que

$$V(I^* + \theta) = V(\bar{I} + \theta) + \psi(a),$$

si el agente realiza dicha acción a y, por ejemplo, $-\infty$ en todo otro caso. Así se tiene el "First Best" (el principal elige la acción a que maximiza su beneficio). El costo es en este caso:

$$C(a, \theta) = I^* = h(V(\bar{I} + \theta) + \psi(a)) - \theta,$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} &= h'(V(\bar{I} + \theta) + \psi(a)) V'(\bar{I} + \theta) - 1 \\ &= \frac{V'(\bar{I} + \theta)}{V'(h(V(\bar{I} + \theta) + \psi(a)))} - 1 \\ &= \frac{V'(h(V(\bar{I} + \theta)))}{V'(h(V(\bar{I} + \theta) + \psi(a)))} - 1. \end{aligned}$$

Dado que h es monótona creciente, $V' > 0$ es decreciente y $\psi(a) \geq 0$, se llega a que

$$\frac{V'(h(V(\bar{I} + \theta)))}{V'(h(V(\bar{I} + \theta) + \psi(a)))} \geq 1,$$

con lo cual $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$. Es decir que en el "First Best", siempre el costo del principal aumenta cuando crece la riqueza inicial del agente. En el caso de información asimétrica, cuando el principal no puede observar la acción que el agente realiza, sino sólo el resultado obtenido, el principal debe ofrecer un esquema de incentivos que compense al agente por la aleatoriedad presente en los posibles resultados. Dado que el agente se supone averso al riesgo, mientras que el principal es neutral al riesgo, el costo del principal aumenta en el "Second Best" con respecto al "First Best". Al analizar el caso de riesgo moral se encuentran dos efectos contrapuestos: (i) Por un lado a mayor valor de θ , es necesario mayores valores de I , para, por ejemplo, satisfacer la restricción de participación (2), es decir el costo aumenta para valores mayores de θ ; (ii) Por otra parte, un mayor valor de θ puede hacer que disminuya el coeficiente de aversión al riesgo del agente, haciendo que en este caso disminuya el costo del principal (En ([1]) se prueba que la pérdida del principal es creciente como función del coeficiente de aversión al riesgo del agente.). Esto plantea el interrogante de cuál de estos efectos domina, haciendo que efectivamente el costo del principal aumente cuando aumenta la riqueza inicial del agente, o bien equilibrando ambos efectos sin producir cambios en el costo, o aún llegando a darse la situación de que el costo disminuya.

Una forma de considerar el cambio en el costo es analizar su derivada $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta}$. En su trabajo de 1999, Thiele y Wambach ([5, Proposition 1]) mostraron, basándose en el teorema de la envolvente, la siguiente propiedad:

Proposición 1 *El costo de implementar la acción a , cuando el agente dispone de una riqueza inicial θ , verifica que:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} &= -1 + V'(\bar{I} + \theta) \sum_{i=1}^n \pi_i(a) \frac{1}{V'(I_i + \theta)} \\ &= -1 + V'(h(V(\bar{I} + \theta))) \sum_{i=1}^n \pi_i(a) \frac{1}{V'(h(v_i))}. \end{aligned}$$

En el mismo trabajo estos autores también probaron:

Proposición 2 *Bajo los supuestos (1) sobre V , si además V tiene derivada de tercer orden continua y se cumple que $-V'''/V'' \leq -3V''/V'$, entonces $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} > 0$ para toda acción a superior al nivel mínimo de esfuerzo.*

Obsérvese que esta proposición implica que bajo los supuestos (1), si además $V''' < 0$, entonces se cumple que $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$; sin embargo en la mayoría de las funciones de utilidad que aparecen en la literatura ocurre que $V''' > 0$.

Este resultado de Thiele y Wambach puede también enunciarse como en la siguiente proposición, con una prueba mucho más sencilla que la expuesta por los mismos en su trabajo original, y sin necesidad de exigir la existencia de la derivada de tercer orden de V .

Proposición 3 Si $1/V'(h(v))$ es una función convexa, entonces $\frac{\partial C(a,\theta)}{\partial \theta} \geq 0$.

Demostración. De (4) se tiene que $\sum_{i=1}^n \pi_i(a) v_i \geq V(\bar{I} + \theta)$. Ahora bien, como V es monótona creciente, $h = V^{-1}$ también lo es; a su vez V' es monótona decreciente, luego $1/V'(h(v))$ es monótona creciente. Estas propiedades junto con la desigualdad de Jensen para funciones convexas implican que

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(a) \frac{1}{V'(h(v_i))} \geq \frac{1}{V'(h(\sum_{i=1}^n \pi_i(a) v_i))} \geq \frac{1}{V'(h(V(\bar{I} + \theta)))}$$

El resultado se obtiene basándose en la expresión de $\frac{\partial C(a,\theta)}{\partial \theta}$ dada en la Proposición 1. ■

Si V tiene derivada de tercer orden, entonces $1/V'(h(v))$ es convexa si y sólo si se tiene la siguiente desigualdad $-V'''(h(v))/V''(h(v)) \leq -3V'''(h(v))/V'(h(v))$, (Lema 2 en Apéndice). Por lo tanto en este caso, la condición de Thiele y Wambach es equivalente a la condición de convexidad en la Proposición 3. Sin embargo esta propiedad no es equivalente a la convexidad de la función $1/V'(I)$, ya que esta última función es convexa si y sólo si $-V'''(I)/V''(I) \leq -2V'''(I)/V'(I)$. El requerimiento de que $1/V'(I)$ sea una función convexa es más fuerte que la condición de convexidad de $1/V'(h(v))$, es así como pueden existir funciones V que verifican que $1/V'(h(v))$ es convexa mientras que $1/V'(I)$ no lo es, esto es cuando $-2V'''(I)/V'(I) < -V'''(I)/V''(I) \leq -3V'''(I)/V'(I)$. Un ejemplo de esta situación es el caso de $V(I) = I^\alpha$, con $0 < \alpha < 1/2$, donde $1/V'(h(v)) = \frac{1}{\alpha} v^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ es convexa ya que $\frac{1-\alpha}{\alpha} > 1$ cuando $0 < \alpha < 1/2$, mientras que $1/V'(I) = \frac{1}{\alpha} I^{1-\alpha}$ no lo es ($0 < 1 - \alpha < 1$). (Obsérvese que si $1/2 < \alpha < 1$, entonces $0 < \frac{1-\alpha}{\alpha} < 1$ y $1/V'(h(v))$ no es convexa).

Thiele y Wambach llamaron a $P = -V'''/V''$ el grado de prudencia absoluta del agente, mientras que $A = -V''/V'$ es el coeficiente de aversión, absoluta, al riesgo. Por lo tanto la condición $P \leq 3A$ en la Proposición 2 expresa que si el grado de prudencia del agente no es mayor que tres veces el de aversión al riesgo, entonces el costo para el principal de implementar una determinada acción es creciente como función de la riqueza inicial del agente.

Otro ejemplo simple de una función de utilidad que verifica estas hipótesis es la ntilidad de tipo cuadrática $V(I) = aI - \frac{b}{2}I^2$, para $0 \leq I < a/b$ y $a, b > 0$, ($P = 0$). También lo verifican las funciones de utilidad exponencial negativa $V(I) = -e^{-\alpha I}$, $\alpha > 0$, ($P = A = \alpha$) y logarítmica, $V(I) = \log(\delta + \alpha I)$, para $I > 0$ y $\delta, \alpha > 0$, ($P = 2\alpha/(\delta + \alpha I) = 2A$).

Caso $n = m = 2$.

En lo sucesivo se considerará el caso de sólo dos productos y dos acciones posibles, esfuerzo bajo, a_L , y esfuerzo alto, a_H , con costos $\psi(a_L) = 0$ y $\psi(a_H) = \psi > 0$. Para implementar el esfuerzo alto en este caso particular, tanto la restricción de participación como la de compatibilidad de incentivos son activas y se tienen las siguientes expresiones para los valores óptimos (ver [2], [1]):

$$v_1 = V(\bar{I} + \theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi, \tag{6}$$

$$v_2 = V(\bar{I} + \theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi, \tag{7}$$

donde $\Delta\pi_2 = \pi_2(a_H) - \pi_2(a_L)$. Para asegurar que $v_1 > 0$, se hará el supuesto de que

$$V(\bar{I} + \theta) > \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi. \quad (8)$$

El siguiente ejemplo muestra que no siempre se verifica que $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$; de hecho ocurre que $C(a, \theta)$ no es una función monótona de θ .

Ejemplo 1 Sea $n = m = 2$ y $V(I) = I^\alpha$, con $1/2 < \alpha < 1$. Se mostrará que, para ciertos valores de los parámetros, puede ocurrir que el costo $C(a, \theta)$ no sea una función creciente de θ . Las derivadas de V son

$$\begin{aligned} V'(I) &= \alpha I^{\alpha-1} > 0, \\ V''(I) &= \alpha(\alpha-1) I^{\alpha-2} < 0, \text{ y} \\ V'''(I) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) I^{\alpha-3} > 0, \end{aligned}$$

con lo cual

$$-\frac{V'''(I)}{V''(I)} = \frac{2-\alpha}{I} \quad \text{y} \quad -\frac{V''(I)}{V'(I)} = \frac{1-\alpha}{I}.$$

El supuesto que $1/2 < \alpha < 1$ implica que

$$-\frac{V'''(I)}{V''(I)} > -3 \frac{V''(I)}{V'(I)}.$$

Por (6) y (7), la función de costo para implementar la acción de costo alto, a_H , está dada por

$$\begin{aligned} C(a_H, \theta) &= \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H) h(v_i) - \theta \\ &= \pi_1(a_H) h\left(V(\bar{I} + \theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi\right) + \pi_2(a_H) h\left(V(\bar{I} + \theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi\right) - \theta. \end{aligned}$$

Como $V(I) = I^\alpha$, se tiene que $h(v) = v^{1/\alpha}$, con lo cual

$$C(a_H, \theta) = \pi_1(a_H) \left((\bar{I} + \theta)^\alpha - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right)^{1/\alpha} + \pi_2(a_H) \left((\bar{I} + \theta)^\alpha + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right)^{1/\alpha} - \theta. \quad (9)$$

Dados los siguientes valores de parámetros:

$$\alpha = 2/3, \quad \pi_2(a_L) = 1/4, \quad \pi_2(a_H) = 1/3, \quad \bar{I} = 0,$$

supóngase que $\theta > 0, \psi > 0$ son tales que

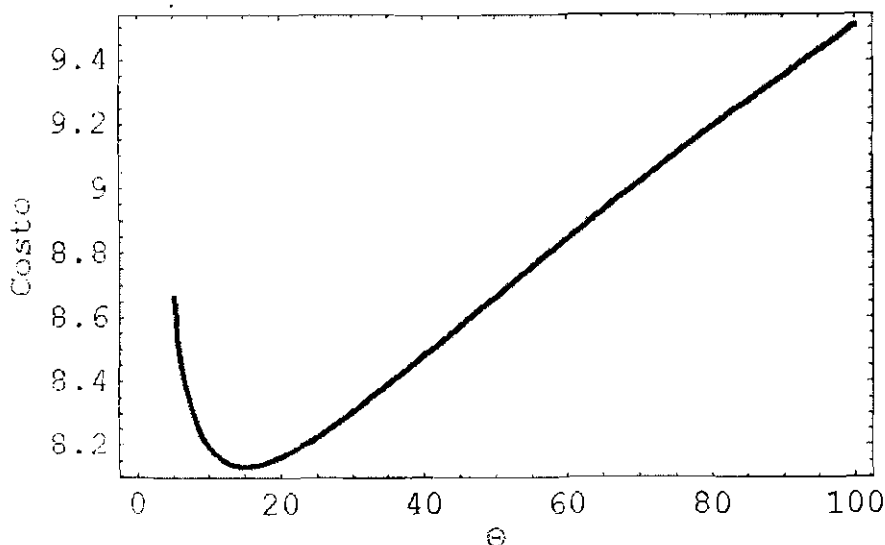
$$\theta^{2/3} > 3\psi.$$

Entonces

$$C(a_H, \theta) = \frac{2}{3} (\theta^{2/3} - 3\psi)^{3/2} + \frac{1}{3} (\theta^{2/3} + 9\psi)^{3/2} - \theta.$$

En este caso el costo del principal no es monótono creciente como función de la riqueza inicial del agente. Su gráfica se puede observar en la siguiente figura (para $\psi = 1$),

Figure 1: Costo en función de θ



Considerando la expresión de $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta}$ en la Proposición 1 se deduce que ésta es positiva para $a = a_H$ si y sólo si

$$g(\psi) = \pi_1(a_H) \frac{1}{V' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right) \right)} + \pi_2(a_H) \frac{1}{V' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right) \right)}$$

$$> \frac{1}{V' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) \right) \right)}$$

De esta definición de $g(\psi)$ se tiene que

$$g(0) = \frac{1}{V' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) \right) \right)} \quad \text{y} \quad g'(0) > 0,$$

además $g'(\psi) > 0$ siempre que $-V'''/V'' \leq -3V''/V'$. (Ver Apéndice, Lema 3 y Corolario 1). Por lo tanto la condición suficiente en la Proposición 2 asegura que $g(\cdot)$ es estrictamente creciente, lo cual implica que $g(\cdot)$ es siempre mayor a $\frac{1}{V'(h(V(\bar{I}+\theta)))}$ para todo valor de $\psi > 0$ y, consecuentemente $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} > 0$. Sin embargo esto es mucho más de lo que se necesita para asegurar que el costo $C(a, \theta)$ es creciente en θ , pues podría ocurrir que $g(\psi) > \frac{1}{V'(h(V(\bar{I}+\theta)))}$ sin que $g(\psi)$ sea necesariamente monótona creciente.

Para valores pequeños del costo $\psi = \psi(a_H)$, se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 4 $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ para valores pequeños de ψ .

Demostración. Como ya se ha visto, $\frac{\partial C(a, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ si y sólo si $g(\psi) \geq g(0)$. Del Lema 3 en el Apéndice, se tiene que

$$g'(0) = \left(\frac{\pi_1(a_H)\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} - \frac{\pi_2(a_H)\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \right) \frac{V'' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) \right) \right)}{\left(V' \left(h \left(V(\bar{I} + \theta) \right) \right) \right)^3}$$

$$= -\frac{V'' \left(\bar{I} + \theta \right)}{\left(V' \left(\bar{I} + \theta \right) \right)^3} > 0,$$

luego se concluye que para valores pequeños de ψ debe ser $g(\psi) \geq g(0)$, de donde $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$. ■

Proposición 5 Sea $V(\bar{I} + \theta) \geq \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi$. Si $-V'''(h)/V''(h) > -3V''(h)/V'(h)$, entonces o bien $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$, o bien existe $\psi^*, 0 < \psi^* < \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)} V(\bar{I} + \theta)$, tal que $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ si $\psi \leq \psi^*$, y $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$ si $\psi \geq \psi^*$.

Demostración. Recordemos que $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ si y sólo si $g(\psi) \geq g(0)$, por lo tanto se analizará esta última desigualdad. De $-V'''(h)/V''(h) > -3V''(h)/V'(h)$ y la expresión de la derivada segunda $g''(\psi)$ en el Apéndice, Lema 3, se observa que $g''(\psi) < 0$. Luego $g(\psi)$ es estrictamente cóncava, lo cual, con el hecho de que $g'(0) > 0$, implican que la función g tiene a lo más un extremo relativo interior que debería ser un máximo. Es así como g no puede presentar un mínimo interior en el intervalo de definición $\left[0, \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)} \bar{V} \right]$ (recordar que debe cumplirse que $\bar{V} = V(\bar{I} + \theta) \geq \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi$). Por lo tanto o bien el mínimo se presenta en 0 ($g(\psi) \geq g(0)$) y entonces $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$; o bien el mínimo se alcanza en el

otro extremo del intervalo con $g\left(\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(\alpha_L)}V(\bar{I} + \theta)\right) < g(0)$. En este último caso, dado que la función g sólo puede tener un valor máximo interior y ningún mínimo interior, se llega a la existencia de ψ^* , $0 < \psi^* < \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(\alpha_L)}V(\bar{I} + \theta)$, tal que $g(\psi^*) = g(0)$, $g(\psi) \geq g(0)$ si $\psi \leq \psi^*$ y $g(\psi) \leq g(0)$ si $\psi \geq \psi^*$; luego $\frac{\partial C(\alpha_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ si $\psi \leq \psi^*$, y $\frac{\partial C(\alpha_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$ si $\psi \geq \psi^*$. ■

Ejemplo 2 *Considérese la función de utilidad y los valores de parámetros dados en el Ejemplo 1, donde*

$$C(\alpha_H; \theta) = \frac{2}{3} \left(\theta^{2/3} - 3\psi \right)^{3/2} + \frac{1}{3} \left(\theta^{2/3} + 9\psi \right)^{3/2} - \theta.$$

Si se analiza cómo varía este costo como función del parámetro ψ , entonces se tiene el siguiente gráfico (para $\theta = 100$):

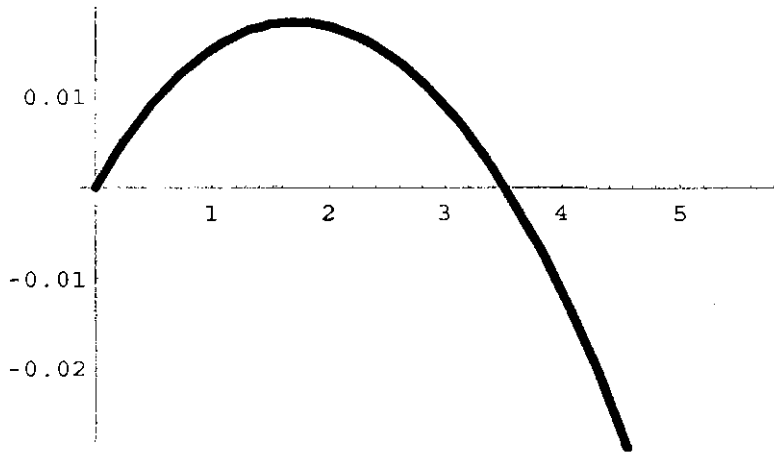


Figure 2: $\frac{\partial C(\alpha, \theta)}{\partial \theta}$ en función de ψ , para $\theta = 100$

4 Funciones de utilidad tipo HARA

Las funciones de utilidad tipo HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) son aquellas funciones de utilidad cuyo coeficiente de aversión al riesgo definen una hipérbola, y que en general vienen dadas como:

$$V(I) = \frac{1}{\gamma - 1} (\delta + \gamma I)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}, \quad (10)$$

para $\delta + \gamma I > 0$; donde $\delta > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0, \gamma \neq 1$ son parámetros.

Los casos límites $\gamma \rightarrow 0$ y $\gamma \rightarrow 1$, luego de una transformación afín conveniente, llevan a las funciones de utilidad exponencial negativa, $V(I) = -e^{-I/\delta}$, y logarítmica, $V(I) = \log(\delta + I)$, respectivamente. El caso particular de $\gamma = -1$ da la utilidad cuadrática $V(I) = -\frac{1}{2}(\delta - I)^2$. Como puede observarse este tipo de funciones de utilidad HARA abarca la mayoría de las funciones de utilidad que se utilizan en los casos prácticos.

La expresión del coeficiente de aversión al riesgo es:

$$A(I) = \frac{1}{\delta + \gamma I}$$

que claramente es decreciente en I .

Para estas funciones se tiene

$$\begin{aligned} -V'''(I)/V''(I) &= (1 + \gamma)(\delta + \gamma I)^{-1}, \\ -3V''(I)/V'(I) &= 3(\delta + \gamma I)^{-1}. \end{aligned}$$

Así, la condición $-V'''(h)/V''(h) \leq -3V''(h)/V'(h)$ se verifica si y sólo si $\gamma \leq 2$. La función

$$\frac{1}{V'(h(v))} = ((\gamma - 1)v)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

es convexa si $\gamma \leq 2$ y cóncava para $\gamma \geq 2$. Por lo tanto se puede concluir que no todas las funciones de utilidad de tipo HARA verifican la condición suficiente para asegurar que el costo es creciente como función de la riqueza inicial del agente. Sin embargo, en el caso bajo análisis de dos acciones y dos resultados posibles, se puede calcular la expresión para la derivada de la función de costo, $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta}$, y analizar si se cumple la condición sobre la función g : $g(\psi) \geq g(0)$. Se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 6 Si V es una función de utilidad de tipo HARA (10), se cumple:

(i) Si $\gamma \leq 2$, entonces $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$.

(ii) Sea $\gamma > 2$ y supóngase que $V(\bar{I} + \theta) \geq \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi$. Si $\pi_2(a_H) \geq (\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}$, entonces $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ para todo θ . Si $\pi_2(a_H) < (\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}$, entonces existe ψ^* tal que $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ para $\psi \leq \psi^*$, pero $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$ si $\psi \geq \psi^*$.

Demostración. (i) Es inmediato de la Proposición 2 ya que si $\gamma \leq 2$, entonces

$$-V'''(h)/V''(h) \leq -3V''(h)/V'(h).$$

(ii) Recordemos que la condición $V(\bar{I} + \theta) \geq \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi$ es el supuesto (8). De la definición de V y g ,

$$g(\psi) = \pi_1(a_H) \left((\gamma - 1) \left(\bar{V} - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \pi_2(a_H) \left((\gamma - 1) \left(\bar{V} + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

donde $\bar{V} = V(\bar{I} + \theta)$ y

$$g(0) = ((\gamma - 1)\bar{V})^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Ahora bien, $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$ si y sólo si $g(\psi) \geq g(0)$, por lo tanto se analizará esta última

desigualdad. Sea $\gamma > 2$, considerando que en este caso $-V'''/V'' > -3V''/V'$, por un razonamiento similar al de la demostración de la Proposición 5, se concluye que g no puede presentar un mínimo interior en el intervalo de definición $\left[0, \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right]$ (recordar que debe cumplirse que $\bar{V} = V(\bar{I} + \theta) \geq \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi$). Dado que

$$g\left(\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right) = \pi_1(a_H)\left((\gamma-1)\left(\bar{V} - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \\ + \pi_2(a_H)\left((\gamma-1)\left(\bar{V} + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

se tiene que

$$g\left(\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right) = \pi_2(a_H)\left((\gamma-1)\frac{1}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = g(0)\frac{\pi_2(a_H)}{(\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

La hipótesis $\pi_2(a_H) \geq (\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}$ implica que g presenta su valor mínimo en 0, como se quería probar. (Observar que $g(0) = ((\gamma-1)\bar{V})^{\frac{1}{\gamma-1}} > 0$). En cambio, si $\pi_2(a_H) < (\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}$, se llega a $g\left(\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right) < g(0)$, con lo cual $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$ para valores de ψ cercanos al máximo valor posible $\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}$, para θ dado. En efecto, por las características de la función g en este caso ($g'(0) > 0, g''(\psi) < 0, g(0) > g\left(\frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right)$) debe existir un único punto $\psi^* \in \left(0, \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}\right)$ que verifica que $g(\psi) \geq g(0)$ si $0 \leq \psi \leq \psi^*$ y $g(\psi) \leq g(0)$ si $\psi^* \leq \psi \leq \frac{\Delta\pi_2}{\pi_2(a_L)}\bar{V}$. En el primero de los casos $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} \geq 0$, y en el segundo $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$. ■

Observación: El valor de ψ^* de la proposición anterior es una solución de la ecuación

$$\pi_1(a_H)\left((\gamma-1)\left(\bar{V} - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi^*\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \pi_2(a_H)\left((\gamma-1)\left(\bar{V} + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi^*\right)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ = ((\gamma-1)\bar{V})^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

o, equivalentemente,

$$\pi_1(a_H)\left(\bar{V} - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi^*\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} + \pi_2(a_H)\left(\bar{V} + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi^*\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \bar{V}^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

De esta proposición se puede inferir que si la condición de Thiele y Wambach no se verifica, para que el costo del principal sea monótono creciente como función de la riqueza del agente es necesario que la probabilidad de obtener el mejor resultado al realizar el esfuerzo alto, a_H , sea bastante mayor que la de obtener este mejor resultado bajo el esfuerzo bajo, a_L . La condición aquí es: $\pi_2(a_H) \geq (\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Obsérvese que $\gamma > 2$ implica que $\frac{1}{\gamma-1} < 1$ y por lo tanto $(\pi_2(a_L))^{\frac{1}{\gamma-1}} > \pi_2(a_L)$. Es decir que si $\pi_2(a_H) \cong \pi_2(a_L)$, puede ocurrir que el efecto de un mayor valor de θ en el coeficiente de aversión al riesgo (haciendo que el agente sea menos averso al riesgo) predomine y produzca, consecuentemente, una disminución en el costo del principal de implementar la acción a_H .

Ejemplo 3 Para la función de utilidad HARA de parámetros $\gamma = 3$ y $\delta = 1$; si $\pi_2(a_L) = 0,6$; $\pi_2(a_H) = 0,7$; $\bar{I} = 0$; $\psi = 3,74$; $\theta = 100$, entonces $\frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$. En efecto, para estos valores especificados, los valores óptimos son

$$v_1 = V(\bar{I} + \theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi = 0,017;$$

$$v_2 = V(\bar{I} + \theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \psi = 37,417;$$

y la derivada de la función de costo para implementar la acción de costo alto, a_H , es negativa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(a_H, \theta)}{\partial \theta} &= -1 + V'(h(V(\bar{I} + \theta))) \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H) \frac{1}{V'(h(v_i))} \\ &= -0,088. \end{aligned}$$

El Ejemplo 1 es también un caso de una función de utilidad HARA ($\gamma = 3, \delta = 0$).

5 Principal averso al riesgo

En el caso de un principal averso al riesgo, con función de utilidad $U(q - I)$, $U' > 0, U'' < 0$ se plantean las mismas preguntas sobre el efecto de cambios en la riqueza de un agente en el beneficio del principal. Se considerará el caso de dos acciones y dos resultados posibles, como en las secciones anteriores.

Si el principal desea implementar la acción a_L de menor costo para el agente, entonces es suficiente con ofrecer un incentivo constante $I_1 = I_2 = I^*$, que satisfaga con igualdad la restricción de participación del agente (El beneficio neto esperado, $B = \pi_1(a_H)U(q_1 - I) + \pi_2(a_H)U(q_2 - I)$, es decreciente en I):

$$V(I^* + \theta) = V(\bar{I} + \theta) + \psi(a_L).$$

El cambio en I^* cuando cambia θ verifica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*}{\partial \theta} &= - \frac{V'(I^* + \theta) - V'(\bar{I} + \theta)}{V'(I^* + \theta)} \\ &= -1 + \frac{V'(\bar{I} + \theta)}{V'(I^* + \theta)}, \end{aligned}$$

dado que $I^* \geq \bar{I}$ y que $V' > 0$ es decreciente se tiene que $\frac{\partial I^*}{\partial \theta} \geq 0$, luego el beneficio del principal disminuye cuando enfrenta un agente más rico. Si el principal desea implementar a_H , entonces resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\max_{v_1, v_2} \pi_1(a_H)U(q_1 - h(v_1) + \theta) + \pi_2(a_H)U(q_2 - h(v_2) + \theta),$$

sujeto a las restricciones de racionalidad individual y de compatibilidad de incentivos (4) y (5). Si $B(a_H, \theta)$ es el valor de este problema, la pregunta es: ¿Bajo qué condiciones también se verifica que $\frac{\partial B(a_H, \theta)}{\partial \theta} < 0$?

Se supone a continuación que $0 = \psi(a_L) < \psi(a_H) = \psi$.

Lema 1 Sea $n = m = 2$. Entonces se cumple que:

- (i) El esquema óptimo de incentivos verifica la restricción de participación con igualdad.
(ii) Si la restricción de compatibilidad de incentivos no es activa, entonces en el óptimo, $\text{signo} \left[\frac{\partial B}{\partial \theta} \right] = \text{signo} \left[\pi_1(a_H)V'(I_1 + \theta) + \pi_2(a_H)V'(I_2 + \theta) - V'(\bar{I} + \theta) \right]$
(iii) Si el esquema óptimo de incentivos verifica ambas restricciones con igualdad, la solución es $I_1^* = h(v_1) - \theta$, $I_2^* = h(v_2) - \theta$, donde

$$v_1 = V(\bar{I} + \theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi, \quad (11)$$

$$v_2 = V(\bar{I} + \theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi, \quad (12)$$

y el beneficio esperado neto verifica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \theta} = & \pi_1(a_H)U'(q_1 - I_1^* + \theta) \frac{V'(I_1^* + \theta) - V'(\bar{I} + \theta)}{V'(I_1^* + \theta)} + \\ & \pi_2(a_H)U'(q_2 - I_2^* + \theta) \frac{V'(I_2^* + \theta) - V'(\bar{I} + \theta)}{V'(I_2^* + \theta)}. \end{aligned}$$

Demostración. (i) La restricción de participación (4) se verifica con igualdad para todo número m de acciones y n de resultados, pues en otro caso es posible elegir $\varepsilon > 0$ de manera que esta condición se siga cumpliendo al considerar $v_i - \varepsilon$, pero este menor valor de v_i deja inalterada la otra restricción de compatibilidad de incentivos (5) y aumenta el beneficio esperado.

(ii) Por (i) el problema del principal puede plantearse como

$$\max_{v_1, v_2} \pi_1(a_H)U(q_1 - h(v_1) + \theta) + \pi_2(a_H)U(q_2 - h(v_2) + \theta),$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)v_i - \psi = V(\bar{I} + \theta), \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_L)v_i \leq V(\bar{I} + \theta), \quad (14)$$

donde $v_i = V(I_i + \theta)$. La correspondiente función de Lagrange es:

$$\begin{aligned} L = & \pi_1(a_H)U(q_1 - h(v_1) + \theta) + \pi_2(a_H)U(q_2 - h(v_2) + \theta) + \\ & \lambda \left(\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)v_i - \psi - V(\bar{I} + \theta) \right) + \mu \left(V(\bar{I} + \theta) - \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_L)v_i \right), \end{aligned}$$

y las condiciones de primer orden son

$$L_{v_i} = -\pi_i(a_H) \frac{U'(q_i - h(v_i) + \theta)}{V'(h(v_i))} + \lambda\pi_i(a_H) - \mu\pi_i(a_L) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$L_\lambda = 0,$$

$$L_\mu \geq 0, \mu \geq 0, \mu L_\mu = 0.$$

Si $\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_L)v_i < V(\bar{I} + \theta)$, entonces $\mu = 0$ y se llega a

$$\lambda = \frac{U'(q_1 - h(v_1) + \theta)}{V'(h(v_1))} = \frac{U'(q_2 - h(v_2) + \theta)}{V'(h(v_2))}. \quad (15)$$

Obsérvese que $\lambda > 0$ por los supuestos realizados sobre U' y V' . Las igualdades (13) y (15) definen implícitamente a v_1 y v_2 . Una aplicación del teorema de la envolvente da

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \theta} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} = \pi_1(a_H)U'(q_1 - h(v_1) + \theta) + \pi_2(a_H)U'(q_2 - h(v_2) + \theta) - \lambda V'(\bar{I} + \theta) \\ &= \lambda (\pi_1(a_H)V'(h(v_1)) + \pi_2(a_H)V'(h(v_2)) - V'(\bar{I} + \theta)), \end{aligned}$$

donde los valores de λ , v_1 y v_2 son los determinados por (13) y (15) y $\mu = 0$. Como $\lambda > 0$, se obtiene el resultado deseado.

(iii) Los valores indicados en (11) y (12) de v_1 y v_2 se obtienen de resolver el sistema

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)v_i &= V(\bar{I} + \theta) + \psi, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_L)v_i &= V(\bar{I} + \theta). \end{aligned}$$

Por derivación directa de $B = \pi_1(a_H)U(q_1 - h(v_1) + \theta) + \pi_2(a_H)U(q_2 - h(v_2) + \theta)$, incorporando los valores calculados de v_1 y v_2 , que también dependen de θ , se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \theta} &= \pi_1(a_H)U'(q_1 - h(v_1) + \theta) \left(1 - \frac{V'(\bar{I} + \theta)}{V'(h(v_1))} \right) + \\ &\quad \pi_2(a_H)U'(q_2 - h(v_2) + \theta) \left(1 - \frac{V'(\bar{I} + \theta)}{V'(h(v_2))} \right) \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado enunciado por pasos algebraicos. ■

Proposición 7 Sea $n = m = 2$. Entonces

(i) Si la restricción de compatibilidad de incentivos no es activa, entonces $\frac{\partial B}{\partial \theta} \leq 0$ siempre que la función $1/V'(h(v))$ sea cóncava.

(ii) Si el esquema óptimo de incentivos verifica ambas restricciones con igualdad y la solución es $I_1^* = h(v_1) - \theta$, $I_2^* = h(v_2) - \theta$, como en el Lema 1 (iii), entonces $\frac{\partial B}{\partial \theta} \leq 0$ si y sólo si

$$\frac{U'(q_1 - I_1^*)}{U'(q_2 - I_2^*)} \leq \frac{\pi_2(a_H) V'(I_1^* + \theta) V'(\bar{I} + \theta) - V'(I_2^* + \theta)}{\pi_1(a_H) V'(I_2^* + \theta) V'(I_1^* + \theta) - V'(\bar{I} + \theta)}.$$

Demostración. (i) Del lema anterior se sabe que en el óptimo se cumple:

$$\text{signo} \left[\frac{\partial B}{\partial \theta} \right] = \text{signo} [\pi_1(a_H)V'(I_1 + \theta) + \pi_2(a_H)V'(I_2 + \theta) - V'(\bar{I} + \theta)].$$

Si $1/V'(h(v))$ es cóncava, $V'(h(v))$ es cóncava y, utilizando que $h = V^{-1}$ es cóncava y creciente y que V' es decreciente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)V'(h(v_i)) &\leq V' \left(\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)h(v_i) \right) \\ &\leq V' \left(h \left(\sum_{i=1}^2 \pi_i(a_H)v_i \right) \right) \\ &= V'(h(V(\bar{I} + \theta) + \psi)) \\ &\leq V'(h(V(\bar{I} + \theta))) \\ &= V'(\bar{I} + \theta), \end{aligned}$$

con lo cual $\frac{\partial B}{\partial \theta} \leq 0$.

(ii) Sigue inmediatamente del lema anterior (iii), considerando que $V'(I_2^* + \theta) \leq V'(\bar{I} + \theta) \leq V'(I_1^* + \theta)$.

■

Obsérvese que el resultado (i) coincide con el conocido para un principal neutral al riesgo (Proposición 3). Sin embargo, aún cuando $1/V'(h(v))$ sea convexa, en el segundo caso puede ocurrir que $\frac{\partial B}{\partial \theta} > 0$, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 Sea $\pi_2(a_L) = 0,6; \pi_2(a_H) = 0,7; \bar{I} = 0; \psi = 1$. Considere un agente con función de utilidad HARA de parámetros $\gamma = 1,8$ ($\gamma = 2$) y $\delta = 1$; y un principal con función de utilidad exponencial $U(x) = -e^{-x}$ (o bien potencial $U(x) = \sqrt{x}$ o bien logarítmica $U(x) = \log x$), con $q_1 = 10, q_2 = 100$. Como $\gamma \leq 2$, se tiene que la función $1/V'(h(v))$ es convexa (ver Sección 4), sin embargo el beneficio del principal no es siempre decreciente con la riqueza del agente como puede observarse en las siguientes figuras:

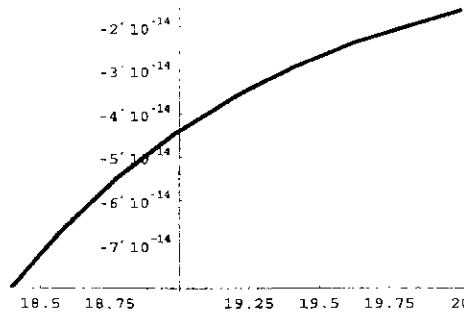


Figure 3: Beneficio del principal, $U(x) = -e^{-x}, \gamma = 1,8$

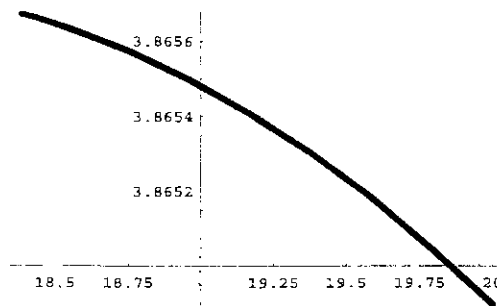


Figure 4: Beneficio del principal, $U(x) = \log x, \gamma = 1,8$

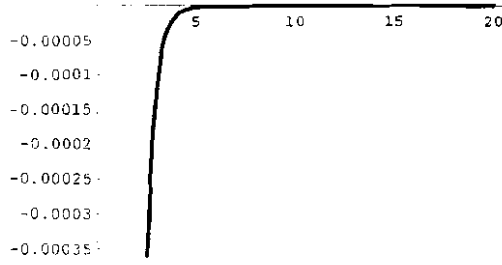


Figure 5: Beneficio del principal, $U(x) = -e^{-x}, \gamma = 2$

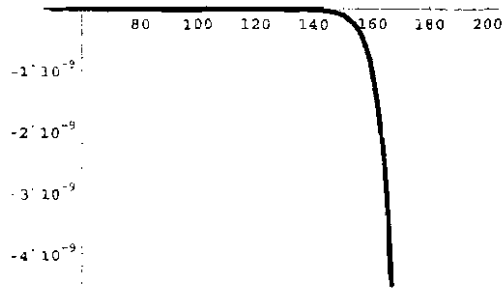


Figure 6: Beneficio del principal, $U(x) = -e^{-x}, \gamma = 2$

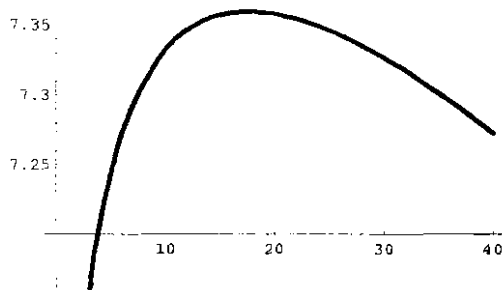


Figure 7: Beneficio del principal, $U(x) = \sqrt{x}, \gamma = 2$

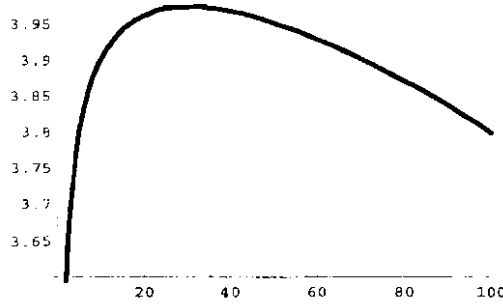


Figure 8: Beneficio del principal, $U(x) = \log x, \gamma = 2$

6 Conclusiones

Se ha considerado el modelo del principal-agente con la inclusión de cierto nivel de riqueza del agente. En el caso de principal neutral al riesgo y agente averso al riesgo con función de utilidad aditivamente separable, se encontró una demostración alternativa a la dada por Thiele y Wambach (1999), que es aplicable a una clase un poco más amplia de funciones. También se analizó la variación del costo del principal con respecto a la riqueza del agente y en el caso de dos acciones y dos resultados posibles se demostró que si $-V'''(h)/V''(h) \leq -3V''(h)/V'(h)$ (o, más simple, si $1/V'(h)$ es una función convexa) este costo es creciente, y cuando $-V'''(h)/V''(h) > -3V''(h)/V'(h)$ puede ser decreciente en algunos casos. En el caso particular de funciones de utilidad tipo HARA (que incluyen los tipos más usuales en las aplicaciones prácticas) se caracterizó el comportamiento del costo en función de la riqueza del agente según los valores del parámetro γ , y de las probabilidades $\pi_2(a_H)$ y $\pi_2(a_L)$. Para un principal averso al riesgo con función de utilidad $U(q - I)$, se comprobó que aún en el caso en que $1/V'(h)$ sea convexa el beneficio del principal puede aumentar al contratar agentes más ricos. El análisis se ha llevado a cabo en el escenario de dos acciones (esfuerzo alto y esfuerzo bajo) y dos resultados posibles (resultado mejor y resultado peor), restando para estudios futuros los casos generales de un número arbitrario de acciones y de resultados, incluso una cantidad continua.

References

- [1] H. Chade and V.N. Vera de Serio, Risk Aversion, Moral Hazard and the Principal's Loss, *Economic Theory* 20 3, 637-644 (2002).
- [2] S. Grossman and O. Hart, An Analysis of the Principal-Agent Problem, *Econometrica* 51, 7-45 (1983).
- [3] D. Kreps, *Curso de Teoría Microeconómica*, Oxford University Press, New York (1995).
- [4] A. Mas-Colell and M. Perry, *Microeconomic Theory*, Mc Graw Hill (1995).
- [5] H. Thiele and A. Wambach, Wealth Effects in the Principal Agent Model, *J. of Economic Theory* 89, 247-260 (1999).

APÉNDICE

En este Apéndice se asumirá, además de los supuestos (1), que la función V tiene derivada de tercer orden continua.

Lema 2 Si $h = V^{-1}$, la función $1/V'(h)$ es convexa si y sólo si $-V'''(h)/V''(h) \leq -3V''(h)/V'(h)$.

Demostración. Considerando que, para $h = V^{-1}$,

$$h'(v) = \frac{1}{V'(h(v))}, \tag{16}$$

se sigue que las derivadas de primer y segundo orden de $1/V'(h)$ son

$$\frac{d(1/V'(h(v)))}{dv} = -\frac{V''(h(v))h'(v)}{(V'(h(v)))^2} = -\frac{V''(h(v))}{(V'(h(v)))^3} > 0$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d^2(1/V'(h(v)))}{dv^2} &= -\frac{V'''(h(v))h'(v)(V'(h(v)))^3 - 3(V''(h(v)))^2(V'(h(v)))^2h'(v)}{(V'(h(v)))^6} \\ &= -(V'(h(v)))^2h'(v)\frac{V'''(h(v))V'(h(v)) - 3(V''(h(v)))^2}{(V'(h(v)))^6} \\ &= -V'(h(v))\frac{V'''(h(v))V'(h(v)) - 3(V''(h(v)))^2}{(V'(h(v)))^6}. \end{aligned}$$

De donde, $\frac{d^2(1/V'(h(v)))}{dv^2} \geq 0$ si y sólo si

$$V'''(h(v))V'(h(v)) - 3(V''(h(v)))^2 \leq 0,$$

o sea

$$-V'''(h(v))/V''(h(v)) \leq -3V''(h(v))/V'(h(v)),$$

donde se ha utilizado que $V' > 0$ y $V'' < 0$. ■

Lema 3 Si la función g está definida por

$$g(\psi) = \pi_1(a_H) \frac{1}{V'(h(V(\bar{I}+\theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi))} + \pi_2(a_H) \frac{1}{V'(h(V(\bar{I}+\theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi))},$$

entonces

$$g'(\psi) = \frac{\pi_1(a_H)\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2} \frac{V''(h(V(\bar{I}+\theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi))}{(V'(h(V(\bar{I}+\theta) - \frac{\pi_2(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi)))^3} - \frac{\pi_2(a_H)\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2} \frac{V''(h(V(\bar{I}+\theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi))}{(V'(h(V(\bar{I}+\theta) + \frac{\pi_1(a_L)}{\Delta\pi_2}\psi)))^3}$$

y

$$g''(\psi) = \frac{\pi_1(\alpha_H)(\pi_2(\alpha_L))^2}{(\Delta\pi_2)^3} \frac{-V''''V' + 3(V'')^2}{(V')^5} \Big|_h \left(V(\bar{f} + \theta) - \frac{\pi_2(\alpha_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right) \\ + \frac{\pi_2(\alpha_H)(\pi_1(\alpha_L))^2}{(\Delta\pi_2)^2} \frac{-V''''V' + 3(V'')^2}{(V')^5} \Big|_h \left(V(\bar{f} + \theta) + \frac{\pi_1(\alpha_L)}{\Delta\pi_2} \psi \right)$$

Demostración. Sigue directamente de aplicar las reglas de derivación, utilizando la relación (16). ■

Corolario 1 Si $-V''''(h)/V''(h) \leq -3V''(h)/V'(h)$, entonces $g''(\psi) \geq 0$.

Demostración. Dado que $V'' < 0$, se tiene que $-V''''(h)V'(h) + 3(V''(h))^2 = V''(-V''''(h)/V''(h) + 3V''(h)/V'(h)) \geq 0$. La afirmación se sigue de la expresión de $g''(\psi)$ en el lema anterior. ■