

23. Tecnologías de la Información y la Comunicación

La utilización de las TIC para una introducción al caos y la teoría fractal

Martínez, Ignacio¹; Dra. Mazzieri, Gisela²; Mg. Vaira, Stella Maris²

¹ autor; ² orientador

ia.martinez1990@gmail.com; glmazzieri@santafe-conicet.gov.ar; svaira@fbc.unl.edu.ar

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas

Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En los últimos años, las tecnologías de la información y la comunicación han transformado las formas de conocer. En la matemática, las TIC han adquirido relevancia en la formulación y validación de nuevos conocimientos, en particular, en la interpretación del caos y en el desarrollo de la teoría fractal. En la práctica educativa, las TIC influyen y transforman los ambientes de aprendizaje y las relaciones entre docente-alumno-conocimiento.

En la búsqueda de proponer una experiencia innovadora en aula de matemática de nivel superior, en este trabajo se plantea como objetivo analizar los aspectos relevantes del uso de las TIC en la educación matemática para introducir el concepto de caos y la teoría fractal. Desde un enfoque metodológico cualitativo con modalidad no interactiva, se realiza el estudio de un sistema dinámico discreto de población, en el que interesa conocer cómo será el comportamiento de las soluciones a largo plazo y cómo afectan los supuestos iniciales a estas estimaciones. Frente a las limitaciones que presenta el análisis algebraico, emerge la necesidad de la utilización de las TIC como instrumento potente para profundizar el análisis del modelo en cuestión.

Abordar el modelo a través de las TIC en el aula de matemática, constituye una propuesta innovadora en varios aspectos: el modelo discreto permite realizar una introducción al caos y la teoría fractal; la incorporación de esta temática forma parte de un proceso de transformación en los ambientes de aprendizajes; y los estudiantes, a partir de herramientas matemáticas conocidas y las TIC, pueden explorar y validar algunas características de los sistemas dinámicos discretos y del comportamiento caótico.

Palabras clave: Software educativo, Tecnología aplicada, Educación matemática en nivel superior, Sistemas dinámicos discretos.

Introducción

En los últimos años, las dinámicas sociales y el surgimiento de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), han transformado los espacios y las prácticas sociales. La educación, y en particular, la educación universitaria, no es ajena a este proceso. Salinas (2008) sostiene que, en los foros de debate sobre temas universitarios, “se insiste sobre la oportunidad y la necesidad de nuevas iniciativas en la explotación de las posibilidades de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje universitarios” (p. 16). En sentido similar, Villarreal (2012) considera que los ámbitos educativos se transformaron con la incorporación de cada nueva tecnología. Asimismo, la producción de conocimiento se ve transformada ya que está condicionada a los medios utilizados. “Tales medios transforman las prácticas, los contenidos y las formas de conocer” (p. 78).

Respecto a la producción matemática, como se cita en Villarreal (2012), Devlin (1997) considera que:

Esta rápida transformación del modo de trabajo ha cambiado la naturaleza del *hacer matemática* de un modo fundamental. La matemática hecha con la ayuda de una computadora es cualitativamente diferente de la matemática hecha con papel y lápiz solamente. La computadora no

«asiste» simplemente al matemático para hacer su tarea de la manera usual, antes bien cambia la naturaleza de lo que es hecho (p. 80).

Se hace necesario, entonces, reconocer la potencialidad de las TIC en la actividad matemática, tanto en el campo disciplinar como en el ámbito educativo.

En 1983, el matemático Benoit Mandelbrot publica “*The Fractal Geometry of Nature*”, libro que ha marcado un antes y después en la teoría fractal y su relación con la naturaleza. Allí, sienta las bases de la geometría fractal y expone una gran cantidad de aplicaciones en la naturaleza. Además, desarrollos posteriores han mostrado la utilidad de la teoría fractal para estudiar el comportamiento caótico en crecimientos poblacionales, formas geométricas de la naturaleza y la actividad humana, análisis de tejidos humanos para la prevención de enfermedades, entre otros.

Una introducción a estos constructos matemáticos se da a través del estudio de sistemas dinámicos discretos. Por *sistemas dinámicos* se entiende un grupo de objetos que interactúan entre sí de acuerdo a leyes, de modo que, a medida que transcurre el tiempo, el grupo y sus propiedades cambian. Así, los sistemas dinámicos se pueden modelar mediante expresiones matemáticas. En muchos de estos sistemas, se evidencian comportamientos impredecibles a largo

plazo, altamente sensibles a las condiciones iniciales y la teoría fractal resulta una herramienta matemática potente para su estudio. Sin embargo, el valor matemático de los conceptos relacionados a los sistemas dinámicos discretos no radica en la matemática en sí misma sino en la aplicabilidad que tienen estos desarrollos en fenómenos físico-químicos o en procesos biológicos.

Los desarrollos matemáticos mencionados no son ajenos al surgimiento de nuevas tecnologías de la información. La necesidad de realizar una gran cantidad de cálculos y poder organizarlos de forma simple a través de un gráfico, constituían unas de las dificultades para los avances en esta área. Las TIC han sido la herramienta clave en la visualización de la geometría fractal, el reconocimiento de algunas de sus propiedades, el cálculo de dimensión fractal y realizar una gran cantidad de iteraciones de una función.

Desde la asignatura *Métodos Matemáticos aplicados a la Química y la Biología*, de la carrera Licenciatura en Biotecnología de la Universidad Nacional del Litoral, se comenzó a trabajar en la incorporación de las TIC como eje transformador del espacio y las relaciones entre docente-alumno-conocimiento. En el año 2017, se realizó un Proyecto de Innovación Curricular (PIC), denominado “El aula como escenario de interacción: modelos matemáticos y estrategias en el uso de

tecnología educativa”. Los objetivos del proyecto consistían en: revisar y actualizar la planificación de la asignatura; potenciar en los estudiantes la habilidad para el análisis y la síntesis en diferentes estrategias para la resolución de problemas; e implementar el uso de las TIC como herramientas de trabajo para la resolución de problemas aplicados.

En continuación con el PIC y en el marco del proyecto CAI+D “Educación Matemática e interdisciplinariedad. Eje principal de trabajo: la modelización”, se realiza el estudio de un modelo dinámico discreto de población, en vista a ser incorporado como parte del programa de estudios de la asignatura. A través de la utilización de las TIC y el estudio del modelo en cuestión, se pretende introducir el concepto matemático de caos y la teoría fractal, grandes invenciones matemáticas de la segunda mitad del siglo XX.

Objetivos

El objetivo general de este trabajo es analizar los aspectos y aportes relevantes del uso de las TIC en la educación matemática para introducir el concepto de caos y la teoría fractal. Los objetivos específicos son: estudiar el modelo logístico de población, las implicaciones en el concepto de bifurcación y caos; explorar y visualizar posibles soluciones de forma numérica y gráfica a través de

las TIC; evaluar la pertinencia y plausibilidad de esta indagación en la educación matemática.

Materiales y Métodos

Marco teórico

En vista a construir una propuesta que aporte nuevas perspectivas y prácticas en la educación superior, se consideran los aportes de Salinas (2008) en torno a propuestas innovadoras. Salinas sostiene que una propuesta innovadora es “un proceso intencional y planeado, que se sustenta en la teoría y en la reflexión y que responde a las necesidades de transformación de las prácticas para un mejor logro de los objetivos de éstas” (p.18).

La incorporación del uso de las TIC en el aula no es un proceso aislado a los cambios sociales y culturales de la sociedad. Las nuevas tecnologías han transformado la forma de comunicarse y de acceder a la información. El conocimiento ya no reside sólo en el docente sino que es posible acceder a él desde cualquier lugar, en cualquier momento. En este sentido Salinas (2008) sostiene:

El énfasis se traslada de la enseñanza al aprendizaje y esto supone nuevos alumnos-usuarios que se caracterizan por una nueva relación con el saber, por nuevas prácticas de aprendizaje y adaptables a situaciones educativas en

permanente cambio. De igual manera, el rol del docente también cambia: deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a actuar de guía de alumnos para facilitarles el uso de recursos y herramientas que necesitan para explorar y elaborar nuevo conocimiento y destrezas, se convierte en gestor de recursos de aprendizaje y acentúa su papel de orientador. (Salinas, 2008, p.25)

En relación al objetivo del trabajo, es de interés promover en el aula competencias y contenidos matemáticos que sean relevantes en la formación de los estudiantes de la Licenciatura en Biotecnología. Por este motivo, se considera que la utilización de las TIC debe potenciar el trabajo matemático de los estudiantes en el aula.

En cuanto a la preocupación por promover un trabajo matemático potente, interesa reconocer las características de la actividad matemática en el aula. Chevallard, Bosch y Gascón (1997) presentan tres aspectos de la actividad matemática. En primer lugar, *utilizar matemáticas conocidas*, que consiste en utilizar los conocimientos para resolver problemas sin que esto requiera de otras consideraciones. Un segundo aspecto es *aprender (y enseñar) matemáticas*, en el cual el “estudio de un sistema matemático o extra-matemático genera cuestiones que pueden ser abordadas mediante

instrumentos matemáticos que ya existen, pero que son desconocidos para el que desarrolla la actividad” (p.55). Reservado casi estrictamente a investigadores en matemática, el tercer aspecto es *crear matemáticas nuevas*, que consiste en resolver problemas que requieren de construir nuevos modelos o reinterpretar otros para aplicarlos a una nueva situación.

Metodología y materiales

Para el desarrollo de la investigación adoptamos un enfoque metodológico cualitativo, con una modalidad no interactiva. McMillan y Schumacher (2005) caracterizan esta modalidad de investigación como la identificación, estudio y síntesis de los datos para proporcionar un conocimiento del concepto o del suceso. En particular, interesa estudiar los aspectos relevantes que aportan los programas informáticos matemáticos y gráficos en la construcción de conocimiento y la exploración de nuevos conceptos.

Para el estudio del modelo se realizarán cálculos algebraicos y simulaciones con dos programas informáticos: GeoGebra y MATLAB. El primero de ellos, es un software de geometría dinámica, de distribución gratuita, caracterizado por su potencialidad como instrumento didáctico y la sencillez de su manejo (es comúnmente utilizado en la educación secundaria, incluso, en el nivel primario).

El segundo programa requiere de conocimientos básicos de programación pero posee una gran potencia de cálculo y es ampliamente utilizado en la comunidad de matemáticos.

Resultados y Discusión

Como se anticipó anteriormente, para realizar una introducción al caos y la teoría fractal, se realiza el análisis de un sistema dinámico discreto de crecimiento poblacional. Este sistema consiste en la modelización del crecimiento de una población vegetal o animal. A diferencia de un sistema dinámico continuo, en donde el crecimiento de la población se evalúa en cada instante del tiempo, el caso discreto consiste en el crecimiento en períodos de tiempo no continuos, por ejemplo, correspondientes a temporadas o años. Es decir, ya no se utiliza una escala continua del tiempo, sino que los momentos en los que se produce el crecimiento de la población están separados entre sí. En la naturaleza, existen numerosos ejemplos de este tipo de crecimiento: la producción de granos (una vez por temporada), el nacimiento de yacarés (una vez por año), entre otros.

En este trabajo, se estudia un modelo para la producción de granos. El sistema dinámico discreto de población en cuestión consiste en una relación de recurrencia dada por $C_{n+1} = C_n(\mu - \lambda C_n)$, donde n indica la temporada (o intervalo

de tiempo), C_n la población obtenida en la temporada n , μ es la tasa de crecimiento en ausencia de saturación del suelo y λ la influencia de la saturación sobre la producción, siendo estas dos últimas constantes positivas. El modelo, conocido como *modelo logístico en diferencias* (Boyce, DiPrima, 2001), puede presentarse en su forma clásica, $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$, si se considera $C_n = \mu x_n / \lambda$. Definido el valor de una condición inicial x_0 , el de la tasa de crecimiento μ y la temporada n , es posible determinar la producción de granos obtenida al aplicar la ecuación n cantidad de veces. Este modelo discreto está basado en el modelo continuo de Pierre Verhulst (1804 – 1849). Una vez definido el modelo, interesa analizar la estabilidad del sistema. Es decir, cómo es el comportamiento de las soluciones para diferentes valores de las condiciones iniciales x_0 y del parámetro μ . En el contexto del modelo, esto significa, analizar la producción de granos en base a la cantidad sembrada inicialmente y la tasa de crecimiento. Como consecuencia de la formulación del modelo, determinados la condición inicial y el parámetro, se puede determinar el valor de la producción en la temporada n . Si bien esto podría ser útil para calcular producciones en el corto plazo, interesa estudiar cómo serán las producciones a largo plazo y cómo afectan los supuestos iniciales a estas estimaciones. En

términos de la notación utilizada en la expresión del modelo en su forma clásica, el estudio del modelo se centra en el análisis de los valores de x_n , para valores de n suficientemente grandes, bajo distintos valores de x_0 y μ . Podría resultar ambigua la expresión ‘suficientemente grandes’. Una posible interpretación es suponer valores de n que tiendan al infinito. Sin embargo, como se expondrá más adelante, es suficiente estudiar el comportamiento de las soluciones para valores de n para los cuales se pueden comenzar a realizar conjeturas sobre el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

Para realizar este análisis, el camino matemáticamente más certero y confiable, es determinar una expresión algebraica explícita que relacione x_n , x_0 y μ , para cualquier valor de n (notar que la relación de recurrencia relaciona x_{n+1} , x_n y μ , es decir, la producción obtenida en función de la producción de la temporada anterior). Desafortunadamente, no es posible obtener una expresión explícita que relacione dichas variables. Frente a esta imposibilidad, será necesario realizar un análisis cualitativo de las soluciones. Esto es, determinar valores y características del modelo que permitan predecir el comportamiento a largo plazo ante la variación de los supuestos iniciales. Aquí es donde las TIC intervienen con todas sus herramientas.

Para realizar el análisis descripto anteriormente, resulta importante introducir algunos conceptos matemáticos que serán útiles para estudiar el modelo en cuestión. En primer lugar, llamaremos *órbita de x_0* a la lista de valores solución de las sucesivas iteraciones a partir de x_0 (Devaney, 1990). En notación de conjuntos, la órbita O_{x_0} de x_0 puede expresarse como $O_{x_0} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$. En el contexto del modelo, la órbita representa los valores de las producciones en cada una de las temporadas, suponiendo una cantidad infinita de temporadas posibles. Para estudiar estas órbitas, interesa conocer la existencia de valores de x para los cuales las órbitas se acerquen a dichos valores cuando n tienda a infinito. Esto es, identificar si el comportamiento a largo plazo manifiesta una estabilidad en los valores solución o una regularidad en los mismos. Para esto, se obtendrán los *puntos fijos* y *puntos periódicos* del sistema. Los *puntos fijos* del sistema son aquellos valores de x_n tales que $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x_n) = x_n$. Los *puntos periódicos*, de período N , son aquellos valores de x_n tales que $f^N(x_n) = x_n$. Es decir, los puntos periódicos (de período N) son puntos fijos de f^N . Una vez hallados estos valores, se pueden analizar las características de atracción y repulsión de cada uno. Coloquialmente, esto significa que, si para valores iniciales cercanos a

estos puntos (sean fijos o periódicos), las órbitas tienden a estos puntos o se alejan infinitamente.

A partir de las conceptualizaciones realizadas, se comienza el estudio y análisis del modelo. Un primer acercamiento se realizará desde un enfoque algebraico, a través del cual se pueden determinar los intervalos de valores que pueden tomar las variables de interés: la condición inicial x_0 y el parámetro μ . Para determinar estos intervalos se tendrá en cuenta que los valores de x_n deben ser mayores (o iguales) a cero para todo n . Caso contrario, el valor de x_n carecería de sentido en el contexto del modelo (indicaría una producción negativa). El análisis algebraico presenta limitaciones y dificultades cuando se realizan gran cantidad de iteraciones de la expresión que rige el modelo. Las expresiones algebraicas involucradas tras las sucesivas iteraciones adquieren un grado de complejidad que imposibilita el estudio de sus características y particularidades. Por este motivo, emerge la utilización de las TIC como instrumento potente (incluso, necesario) para profundizar el análisis y determinar el comportamiento de las órbitas a largo plazo. Las TIC aportarán dos nuevos enfoques: numérico y gráfico. Ambos enfoques presentan potencialidades y limitaciones, pero, en la búsqueda de elementos que nos permitan

plantear conjeturas más fiables, la complementación de los mismos otorgará información relevante sobre el comportamiento de las órbitas.

Como se mencionó anteriormente, un primer análisis del modelo logístico en diferencias $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ puede realizarse algebraicamente. Puesto que no es objeto de este trabajo hacer énfasis en las deducciones algebraicas, se expondrán sólo los resultados de este análisis (resulta importante aclarar que los procedimientos involucrados no revisten de mayor complejidad y son contenidos que los estudiantes de la Licenciatura en Biotecnología han trabajado en asignaturas anteriores). De este enfoque obtenemos que, como x_n debe ser mayor a cero para todo n , entonces $0 \leq x_n \leq 1$ y $0 \leq \mu \leq 4$. Caso contrario, se obtienen valores negativos de x_n (Ingalls, 2013).

A través del álgebra es posible determinar la existencia de puntos fijos y algunos puntos periódicos. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la complejidad de las expresiones algebraicas involucradas al realizar gran cantidad de iteraciones y la imposibilidad de obtener una expresión explícita de las soluciones, limitan la profundización del enfoque algebraico. En la búsqueda de reconocer el comportamiento de las órbitas bajo diferentes supuestos, las TIC proveen la posibilidad de realizar una gran cantidad de operaciones y diferentes formas de

visualizar las soluciones. Más aún, el impulso que tuvo el estudio de este modelo en las últimas décadas se debe, en gran parte, al surgimiento de las nuevas tecnologías de la información. Por este motivo, con la utilización de los programas informáticos GeoGebra y MATLAB, se profundiza el estudio de las órbitas desde los enfoques numérico y gráfico.

El enfoque numérico consiste en realizar un gran cantidad de iteraciones de $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ para diferentes condiciones iniciales (x_0) y valores del parámetro involucrado (μ). De esta manera, se obtiene un conjunto finito de valores solución que, en algunos casos, permite conjeturar sobre el comportamiento del modelo a largo plazo. A continuación, exponemos los valores solución de las primeras 16 iteraciones realizadas en GeoGebra bajo distintos supuestos iniciales, que resultan de interés para el análisis.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
μ	2.5000	2.5000	3.6200	3.6200
x_0	0.15000	0.75000	0.50000	0.51000
	0.31875	0.46875	0.92000	0.91963
	0.54287	0.62256	0.27085	0.27199
	0.62041	0.58745	0.72676	0.72867
	0.58876	0.60588	0.73077	0.72757
	0.60531	0.59697	0.72402	0.72943
	0.59728	0.60149	0.73532	0.72630
	0.60134	0.59925	0.71621	0.73154
	0.59932	0.60037	0.74797	0.72271
	0.60034	0.59981	0.69373	0.73748
	0.59983	0.60009	0.78189	0.71247
	0.60008	0.59995	0.62758	0.75388
	0.59996	0.60002	0.86010	0.68281
	0.60002	0.59999	0.44280	0.79702
	0.59999	0.60001	0.90796	0.59536
	0.60001	0.60000	0.30753	0.88654
	0.60000	0.60000	0.78368	0.37017

Tabla 1. Comportamiento de la ecuación logística para diferentes valores de μ y x_0 .

En los casos A y B, se comienza con un valor del parámetro $\mu = 2,5$ y condiciones iniciales $x_0 = 0,15$ y $x_0 = 0,75$, respectivamente. Se puede observar que, en ambos casos, las órbitas tienden al valor 0,6, aún al partir de condiciones iniciales distintas. La exploración a partir de otras condiciones iniciales arroja resultados similares. Esto no es suficiente para demostrar la existencia de un punto fijo atractor pero, sin embargo, brinda indicios sobre el comportamiento de la solución a largo plazo.

En los casos C y D se comienza con un valor del parámetro $\mu = 3,62$ y condiciones iniciales $x_0 = 0,50$ y $x_0 = 0,51$, respectivamente. Estas dos órbitas presentan comportamientos diferentes a los casos A y B. Los primeros valores de las órbitas son similares, sin embargo, al aumentar la cantidad de iteraciones, no se reconoce una regularidad en el comportamiento de las órbitas. Esta ausencia de regularidad sucede, incluso, bajo una mayor cantidad de iteraciones. Además se puede apreciar que, ante una pequeña variación de la condición inicial, se obtiene una gran variación de las órbitas a largo plazo.

Esta lista de valores solución se puede generar en apenas unos minutos y con conocimientos básicos en hojas de cálculo. Por razones de extensión del trabajo, sólo se presenta una pequeña cantidad de iteraciones en comparación

con las posibilidades que brinda el programa informático. Además, cálculos similares se pueden realizar con MATLAB. Esto requiere otro grado de complejidad ya que es necesario realizar una rutina de cálculo, pero ofrece una mayor potencia en la cantidad de iteraciones posibles.

Al realizar el análisis de este enfoque numérico, una posible pregunta podría ser si este estudio resulta suficiente para conocer el comportamiento a largo plazo o para poder identificar los puntos fijos o periódicos atractores del modelo. Este cuestionamiento pone en evidencia algunas limitaciones de este enfoque: el manejo de una gran cantidad de datos y la dificultad para identificar regularidades. En los casos A y B de la Tabla 1, ha bastado con apenas dieciséis iteraciones para inferir la existencia de un punto fijo atractor. Sin embargo, no resulta claro cómo es el comportamiento de las órbitas a largo plazo para los casos C y D.

Frente a la limitación del cálculo numérico, surge el enfoque gráfico como una forma de complementar y facilitar el análisis del modelo. Esto es, organizar la información obtenida a través del enfoque numérico en un gráfico, de manera que permita realizar conjeturas sobre el comportamiento del modelo. Ambos programas informáticos, GeoGebra y MATLAB, ofrecen la posibilidad de visualizar gráficamente las órbitas solución.

Si bien es posible realizar distintos tipos de gráficos, se presentan a continuación dos formas de organizar la información: un gráfico dinámico de órbitas y un diagrama de bifurcación. En el primer caso, a través del GeoGebra y con la herramienta *Deslizador*, se realizan variaciones en los supuestos iniciales y consecuentemente, en la vista gráfica, se observa el cambio en el comportamiento de las órbitas. En el segundo caso, por medio de MATLAB, el diagrama de bifurcación brinda un “mapa” del comportamiento de las mismas para diferentes valores de μ . En ambos casos, la organización gráfica de las órbitas permite conjeturar la existencia de puntos fijos y periódicos atractores y, para ciertos intervalos del parámetro μ , la aparición de un comportamiento caótico, el que caracterizaremos más adelante.

Para realizar el gráfico dinámico de órbitas, se crean dos deslizadores (uno para la condición inicial y otro para el parámetro), luego se calcula una cantidad finita de iteraciones bajo los supuestos iniciales determinados a través de los deslizadores y por último, se grafican puntos en un plano cartesiano. Las coordenadas (x, y) de dichos puntos refieren al orden de iteración (el valor de n) y el valor de la función iterada n cantidad de veces, respectivamente. Para mejorar la visualización del comportamiento de las órbitas, se pueden unir puntos consecutivos (en orden de

iteración) a través de un segmento de recta. A continuación mostramos tres gráficos bajo diferentes supuestos iniciales donde, en todos los casos, se ha iterado la función 50 veces.

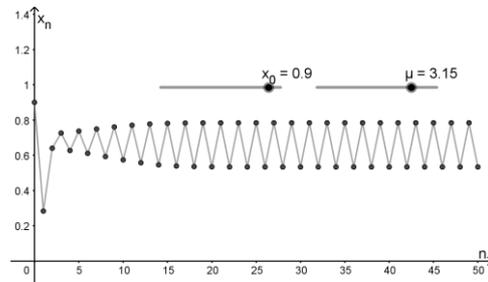


Gráfico 1. Órbita de la ecuación logística discreta para $x_0 = 0.9$ y $\mu = 3.15$.

En el Gráfico 1 se puede observar la aparición de dos puntos periódicos atractores. A diferencia de lo evaluado en los casos A y B de la Tabla 1, el comportamiento de las órbitas a largo plazo no se aproxima a un valor, sino que alterna entre dos valores, lo que se conoce como la existencia de un período-2. Para el mismo valor del parámetro μ , pero diferentes condiciones iniciales, se tienen los mismos puntos periódicos. En el marco del modelo, esto significa que, bajo esta tasa de crecimiento ($\mu = 3,15$), la producción de granos a largo plazo es independiente de las condiciones iniciales y la estabilidad del modelo consiste en la alternancia entre dos valores.

En base a lo indagado desde el enfoque numérico para $\mu = 2,5$ y a través de la exploración con el deslizador, es posible estimar que, para $\mu = 3$, el punto fijo se transforma en repulsor y aparecen dos puntos periódicos atractores. Este cambio

en la cantidad (y/o estabilidad) de los puntos fijos o periódicos, se denomina *bifurcación* (Ingalls, 2013).

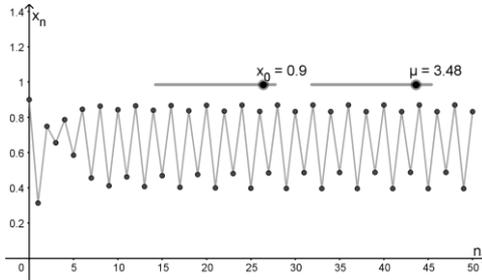


Gráfico 2. Órbita de la ecuación logística discreta para $x_0 = 0.9$ y $\mu = 3.48$.

En el Gráfico 2 se observa que, para $\mu = 3,48$ y para valores de n suficientemente grandes, la órbita alterna periódicamente entre cuatro valores. Esto es, para cierto intervalo que contiene a $\mu = 3,48$ se tienen cuatro puntos periódicos atractores. Una vez más, gracias a la dinámica que brinda el uso de deslizadores, se puede observar que la exploración sobre diferentes condiciones iniciales no afecta el valor de los puntos periódicos atractores. Además, al variar el parámetro μ , se observa que, para $\mu \cong 3,46$, se produce una nueva bifurcación, donde el comportamiento de las órbitas a largo plazo cambia de período-2 a un período-4. Este caso de bifurcación se conoce como *duplicación del período* (Ingalls, 2013). Esta caracterización también es aplicable a lo observado en $\mu = 3$.

Si se continúa con la exploración, se puede notar que, a medida que el valor de μ crece, se producen repetidas duplicaciones del período hasta $\mu \cong 3,6$, donde ya no se puede reconocer un

período o regularidad en el comportamiento de las órbitas. Un ejemplo de esto se muestra en el Gráfico 3, para $\mu = 3,62$.

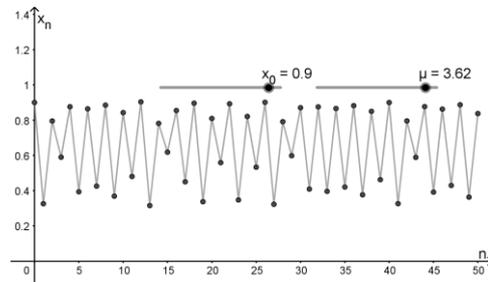


Gráfico 3. Órbita de la ecuación logística discreta para $x_0 = 0.9$ y $\mu = 3.62$.

Además, para ciertos valores $\mu > 3,6$, se tiene que, un pequeño cambio en la condición inicial, produce grandes diferencias en las órbitas asociadas. Sin embargo, puesto que sólo se grafican los valores solución correspondientes a las primeras cincuenta iteraciones, aún no se pueden realizar conjeturas confiables sobre el comportamiento a largo plazo de las órbitas.

Nuevamente, se encuentran limitaciones para el análisis del comportamiento de las órbitas a largo plazo. El gráfico dinámico de órbitas permite realizar exploraciones de manera sencilla y ágil, pero se presentan dificultades para visualizar grandes cantidades de puntos solución. Frente a la necesidad de continuar con la profundización del análisis, se realiza un diagrama de bifurcación. Este diagrama consiste en el gráfico de una gran cantidad de puntos, a partir de una condición inicial fija y para distintos valores del parámetro μ . De modo que,

definida la condición inicial y la cantidad de puntos que se desean graficar, se obtiene el diagrama de bifurcación. Este diagrama se realiza a través de una rutina de programación realizada en MATLAB. Como interesa conocer el comportamiento de las órbitas solución a largo plazo se descartan los primeros valores solución de las sucesivas iteraciones (recordar que, para ciertos valores de μ , las primeras soluciones difieren según la condición inicial adoptada pero luego las órbitas se aproximan a los puntos fijos o periódicos que dependen de μ). De esta manera, se puede lograr una mejor visualización de los puntos fijos y periódicos. A continuación se presenta el diagrama de bifurcación de $x_0 = 0,5$, para cada valor de μ , con un paso de 0,001 (puesto que está comprendido entre 0 y 4, se toman 4001 valores distintos de μ), con el descarte de los valores de las primeras 100 iteraciones y el gráfico de los correspondientes a las siguientes 200 iteraciones.

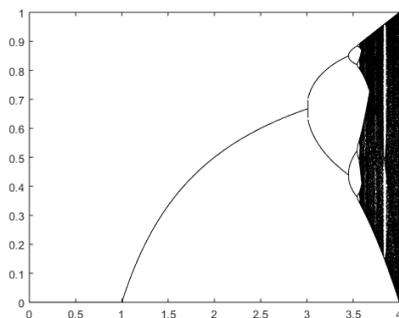


Gráfico 4. Diagrama de bifurcación para $0 \leq \mu \leq 4$.

Como se puede observar en el Gráfico 4, en el eje de abscisas se representa el valor de μ y, en el eje de ordenadas, los

valores de x_n con $100 < n \leq 300$. Ahora bien, ¿cómo se interpreta este gráfico? Para el intervalo $0 \leq \mu < 1$, es difícil observar donde se encuentran los puntos graficados, ya que todos estos se encuentran sobre el eje de abscisas. Esto es, para $0 \leq \mu < 1$, $x_n = 0$ es un punto fijo atractor. En el contexto del modelo esto significa que, a largo plazo, la producción tiende a cero. Luego, para $1 \leq \mu < 3$, se observa el aspecto de una curva. Análogamente al caso anterior, esto nos indica que, para cada valor de μ , las soluciones de las 200 iteraciones se encuentran tan cercanos entre sí que sólo puede visualizarse 'un' punto. Este punto, que depende del valor de μ , se corresponde con un punto fijo atractor.

Sin embargo, para $\mu = 3$, esa curva se bifurca en dos curvas. Esto sugiere que, para $3 < \mu < 3,45$, los valores de 200 iteraciones se encuentran cercanos a dos valores, los cuales se corresponden con puntos periódicos identificados en el Gráfico 1. Esta 'división' de las curvas representa gráficamente el concepto de bifurcación. Las bifurcaciones se repiten hasta $\mu \approx 3,6$.

Hasta aquí, el comportamiento de las órbitas presenta regularidades, lo que permite predecir el comportamiento a largo plazo de las sucesivas iteraciones. Además, al realizar el diagrama de bifurcación de otros valores iniciales, se puede apreciar que estos puntos fijos y

periódicos no dependen de las condiciones iniciales, sino sólo del valor del parámetro μ . En el contexto del modelo estudiado, esto nos indica que la producción de granos puede estimarse a largo plazo cuando la tasa de crecimiento μ es menor a 3,6 y esta predicción no depende del valor inicial de siembra. Sin embargo, el diagrama de bifurcación muestra ciertos intervalos de $3,6 < \mu \leq 4$ en que los puntos correspondientes a las sucesivas iteraciones no presentan ningún punto atractor. A continuación se presenta un diagrama de bifurcación para $3 \leq \mu \leq 4$ (y el mismo valor inicial).

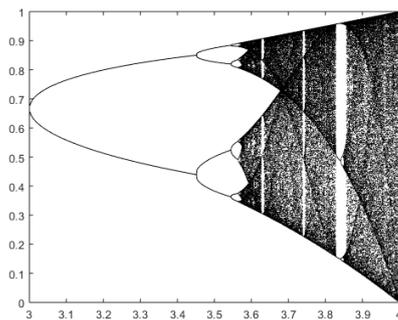


Gráfico 5. Diagrama de bifurcación para $3 \leq \mu \leq 4$.

Como se observa en el Gráfico 5, a partir de una condición inicial dada, los puntos se dispersan sobre todo el intervalo $(0,1)$. Esto sucede aún para mayores valores de n . Al complementar este análisis con la gráfica dinámica ejemplificada en el Gráfico 3, se tienen órbitas que carecen de puntos fijos y periódicos atractores y, además, una pequeña variación sobre las condiciones iniciales representa grandes diferencias en las órbitas solución. Esto es lo que constituye un *comportamiento*

caótico (Ingalls, 2013). Una de las características esenciales de este comportamiento es que las órbitas son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En el contexto del modelo, esto nos indica que, para ciertos valores de $3,6 < \mu \leq 4$ no es posible realizar predicciones sobre la producciones a largo plazo, ya que un mínimo error en la medición inicial, provoca grandes diferencias en las producciones posteriores. Llamativamente, el diagrama de bifurcación es extremadamente similar bajo diferentes condiciones iniciales. Esto no contradice lo planteado acerca del comportamiento caótico ya que se obtienen puntos similares pero éstos corresponden a distintos órdenes de iteración. Más curioso aún es que, el diagrama de bifurcación de otros modelos matemáticos que presentan comportamientos caóticos, muestran una gran similitud con respecto al expuesto anteriormente. Avanzar en el estudio del comportamiento caótico implica la indagación sobre expresiones y conjuntos de órbitas más generales, pero no así más complejas en su expresión matemática. Un ejemplo de esto es el Conjunto de Julia, construido a partir de una ecuación cuadrática definida en el conjunto de los números complejos. El análisis del Conjunto de Julia y, en las últimas décadas, del Conjunto de Mandelbrot

(Devaney, 1990), ha llevado al desarrollo y aplicación de la teoría fractal para el abordaje del comportamiento caótico. Esta relación entre el comportamiento caótico y la teoría fractal tiene su conexión en la propiedad de *autosimilaridad* (Devaney, 1990) que presentan las gráficas de los Conjuntos de Julia y Mandelbrot, una característica esencial de la geometría fractal.

Conclusiones

Más allá de las vinculaciones con el contexto del modelo que se han realizado, existen en la actualidad, modelos más sofisticados para describir el crecimiento de una población que contemplan mayor cantidad de parámetros. Sin embargo, el estudio de este modelo inicial y de gran simpleza, arroja resultados interesantes para introducir los comportamientos caóticos. Variantes del modelo logístico conducen y acercan al estudio del caos y los fractales.

Los avances en el estudio de los comportamientos caóticos y el desarrollo de la teoría fractal, han emergido en los últimos 40/50 años gracias al surgimiento de nuevas tecnologías de la información que permitieron procesar gran cantidad de datos y visualizar las 'formas' del caos. Es por esto que las TIC no sólo resultan ser importantes como instrumento de mediación didáctica, sino que constituyen

la dimensión histórica y epistemológica del caos y la teoría fractal.

En cuanto al análisis realizado a través de las TIC, se puede observar que el trabajo exploratorio prescinde de conocimientos matemáticos avanzados para realizar conjeturas sobre el comportamiento del modelo a largo plazo. Además, la utilización de programas con los que los alumnos ya están familiarizados, facilita la indagación sobre el modelo matemático en cuestión. Si bien, en principio, no es objeto de estudio la teoría fractal para la interpretación del caos, el estudio del modelo abre las puertas a continuar la indagación sobre un área de fuerte desarrollo en los años recientes y gran aplicabilidad a los procesos biológicos.

Además, abordar el modelo logístico en diferencias a través de las TIC, constituye una experiencia innovadora en el aula de matemática en varios aspectos. En primer lugar, los modelos discretos aportan una nueva perspectiva de análisis de los métodos matemáticos, en particular, de los comportamientos caóticos y la teoría fractal. Un segundo aspecto es que la incorporación de esta temática a través de las TIC no es una propuesta aislada al contexto de la asignatura sino que forma parte de un proceso de transformación en los ambientes de aprendizajes, con la utilización de otros modos de trabajo y la incorporación de nuevos recursos didácticos. Por último, el abordaje del

modelo se pretende enmarcar en el segundo aspecto de la actividad matemática propuesto por Chevallard, et al (1997): *aprender (y enseñar) matemáticas*. Los estudiantes, a partir de herramientas matemáticas conocidas y la utilización de las TIC, pueden explorar, conjeturar, indagar y validar algunas características de los sistemas dinámicos discretos, del comportamiento caótico y, consecuentemente, de una gran variedad de modelos matemáticos aplicados a las ciencias biológicas.

Bibliografía

- Boyce, W., DiPrima, R. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley.
- Chevallard, Y, Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: I.C.E, Horsori.
- Devaney, R. (1990). *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics*. Boston: Addison-Wesley.
- Ingalls, B. (2013). *Mathematical Modeling in Systems Biology. An Introduction*. Cambridge: The MIT Press.
- McMillan, J., Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5ta ed.). Madrid: Pearson. Addison Wesley.

Salinas, J. (2008). *Innovación educativa y uso de las TIC*. Sevilla: Universidad Internacional de Andalucía.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia* 3 (5), 73-94.

Agradecimientos

Al Departamento de Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral, por el tiempo, espacio e instrumentos (tanto en material bibliográfico como en soporte informático) brindado para el desarrollo de este trabajo. Especialmente a Stella Vaira y Gisela Mazzieri, directora y co-directora, respectivamente, de la Beca de Iniciación a la Investigación (Cientibeca), desde la cual se desarrolla este trabajo.

Financiamiento

Proyecto PI CAI+D 2016: Educación Matemática e interdisciplinariedad. Eje principal de trabajo: la modelización. Universidad Nacional del Litoral.